12/18 2023
Eizo NAKAZA

Navier-Stokes 方程式に対する問題提起と新たな運動方程式 ver.2

(01/10 2023　加筆)

１．教科書に説明される実在流体の基礎方程式

一般に、以下に示す質量保存則及び運動方程式が与えられている。

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -div\boldsymbol{v} \quad (1)$$

$$\rho\frac{dv}{dt} = -grad\Omega - gradp + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + \frac{1}{3}\mu grad(div\boldsymbol{v}) \quad (2)$$

ρ is the density, $\boldsymbol{v}$ is the velocity vector, Ω is the gravitational potential, μ is the viscosity coefficient that is assumed as constant.

式(2)を与える内部応力の構成方程式は、Newton-Stokes の粘性法則に基づいて、次のように与えられる。

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}\right) \quad (3)$$

σ_{ij} is the stress tensor, e_{ij} is the rate-of-strain tensor, δ_{ij} is the delta tensor.

ここに、運動方程式中の圧力（右辺第一項）及び Newton-Stokes の粘性法則（右辺第二項）には、Stokes の仮説が導入されていることに注意が必要である。

Stokes の仮説：$\lambda = -2\mu/3$ (4) . λ is the second viscosity.

一般に粘性係数μは正値を取るので、第二粘性係数λが負値を取っても良いという条件式(4)は受け入れがたい。Stokes の仮説を受け入れない場合、第２粘性係数λを実験的に適宜与えるか、もしくは圧力を平均圧力に置き換えなければならない。圧力pと平均圧力$\bar{p}$との関係は次のように与えられる。

$$\bar{p} = p - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)div\boldsymbol{v} \quad (5)$$

すなわち、Stokes の仮説は、平均圧力$\bar{p}$を圧力pと見なすことを意味する。

式(2)は一般に Navier-Stokes 方程式と呼ばれているが、その右辺第４項に見る係数“1/3”は、平均圧力の導入及び Newton-Stokes の粘性法則の導入を反映しており、Navier-Stokes 方程式のシンボル的係数として現れている。だが、その係数が、次元数によって変化するところに大きな問題がある。

２．非圧縮流体運動の基礎方程式（誤った説明）

水理学や流体力学の教科書及び解説本、あるいは論文等に、次のような説明が与えられているのが散見される。

非圧縮流体運動の基礎方程式は、以下の式で与えられる。

$$div\boldsymbol{v} = 0 \quad (6)$$

$$\rho\frac{dv}{dt} = -grad\Omega - gradp + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} \quad (7)$$

式(6)は、一般に連続の式と呼ばれている。

だが、上の説明は誤りである。

上の説明で、式(6)は、式(1)に示す質量保存方程式に代わるものとなっているが、$div\boldsymbol{v} = 0$は流体運動に対する一種の条件であり、非圧縮条件である。したがって、質量保存方程式の代わりにはなれない。

式(7)は、一般に、非圧縮流体運動の運動方程式（すなわち、Navier-Stokes 方程式）と呼ばれている。これは、式(2)において、式中陽に現れている$div\boldsymbol{v}$の項を単純に消したものとなっている。すなわち、式(2)と式(6)を連立して式(7)を得たという形になっている。

式(6)と式(7)とを基礎式とする説明には、以下の誤りが存在する。

1) 式(7)はすでに式(6)を連立した形に得られているので、式(7)に加えて、式(6)の連立的提示は誤りである。
2) 式(7)は、式(2)から陽に現れている項のみを単純に消しているので方程式として誤りである。なぜなら、式(7)の右辺第 3 項には依然として$div\boldsymbol{v}$の効果が含まれているからである。したがって、圧力項のpも式(7)では圧力にはなれない。
3) 式(6)及び式(7)のみを基礎式とするとき、密度ρを規定する方程式が一つ足りない。
4) そもそも非圧縮流体の運動方程式というのは存在しない。数学的に導けるものでもない。式(2)は特段圧縮性を仮定して導かれた訳ではない。流体一般について得られている。

３．仲座の構成方程式及び運動方程式（2005 年）

流体の内部応力の構成方程式は、次のように与えられる。

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (8)$$

この式の右辺第二項を、Newton-Nakaza の粘性法則と呼ぶことができる〔式(3)と比較して頂きたい〕。したがって、流体運動の基礎方程式は、次に示す質量保存方程式及び運動方程式で与えられる。

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -div\boldsymbol{v} \quad (1)\text{：再掲}$$

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -grad\Omega - gradp + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + \mu grad(div\boldsymbol{v}) \quad (9)$$

非圧縮性の流体運動は、これらの基礎式を非圧縮条件$div\boldsymbol{v} = 0$の下に解いて与えられる。（すなわち、実在流体に対し、非圧縮性の運動方程式という特別なものは存在しない）

方程式を単純化するという目的で、式(2)や式(9)において、見えている$div\boldsymbol{v}$の項を単純に消すことは許されない。非圧縮流体運動に対する特別な運動方程式は数学的に構築不可能であること、すなわち存在しないことに注意を要する。また、非圧縮性流体運動を仮定して式(3)で$div\boldsymbol{v}$の項を落とし、それを式(8)と同じであると勘違いしてはならない。式(3)で$div\boldsymbol{v}$の項を勝手に落とすことは、当然ながら数学的に許されないのである。

式(8) 及び式(9) は、Stokes の式で、$\lambda = 0$と置いた（第二粘性係数を無用とした）ことに相当する。すなわち、Navier から Stokes までの演繹においては、本来存在してはならない第二粘性係数λの存在を仮定したことが、誤りの根源である。

局所的熱平衡圧の存在が仮定されないとき、圧力に圧力緩和係数の導入を必要とする。これを第二の粘性係数と呼ぶことができる。しかし、圧力緩和係数の物理と粘性係数μの物理とは明確に異なる。その意味からも Stokes の与えた仮説は誤りである。

教科書で説明されている流体の運動エネルギーに関する散逸関数ϕ[例えば、今井、p.283、

式(63.12)]の定義も誤りである。正しくは、

$$\phi = \mu {e_{ij}}^2 \quad (10)$$

と書ける。

Navier-Stokes 方程式のシンボル的係数であった係数“1/3”は遂に堕ちた。式(9)〔そして、式(10)〕にはそのような係数は当然ながら現れていない。式(1)及び式(9)は共に、次元変化に対して不変形を成す。

参考文献

１） 今井功：流体力学（前編）、裳華房、428p.、1973。（特に、pp.259-284 を参照）

２） 仲座栄三：Navier-Stokes 方程式の修正、日本流体力学会、第 40 回流体力学講演会概要集、5p.、2008。

３） 仲座栄三：流体運動の支配方程式とその歴史的変遷、沖縄科学防災環境学会論文集 (Physics), Vol.2, No.1, 8-14, 2017